

Interprétation catégorique des arbres rationnels

Charles Grellois, sous la direction de Paul-André Melliès (PPS)

Le contexte général

La sémantique des jeux permet une interprétation interactive des types et des formules. Une approche inspirée de cette sémantique a permis à Luke Ong de démontrer la décidabilité de la vérification des formules du μ -calcul modal sur les arbres générés par des schémas de récursion d'ordre supérieur. Notre travail s'inscrit dans le projet plus global de réunir sémantique des jeux et vérification, en commençant pour cela par donner un cadre bien défini à la sémantique des jeux avec points fixes.

Le problème étudié

Nous avons étudié les diverses représentations finies de structures engendrées inductivement sur une signature (qui correspondent aux arbres rationnels de Courcelle), et avons cherché les équations reliant les représentations finies d'une même forme infinie. Nous nous sommes restreints au cas où un seul opérateur de point fixe est utilisé, de sorte que l'axiomatique recherchée correspond à une version arborescente des algèbres de Wilke. L'intérêt d'obtenir de telles équations est qu'elle permettra à terme de donner une présentation algébrique de la catégorie libre des jeux à points fixes et de leurs stratégies, qui fournira un fondement mathématique à la sémantique des jeux à point fixe.

La contribution proposée

Nous avons remarqué qu'étant données deux formes finies d'un même arbre rationnel, il en existe une troisième qui s'envoie surjectivement dans les deux. En particulier, on peut prendre la forme finie donnée par la bisimulation des deux autres. Nous avons alors cherché à décomposer les surjections entre ces représentations, et avons conjecturé que deux types d'opérations suffisent : une opération de « roue », qui permet d'itérer partiellement un point fixe et correspond à l'équation $s(ts)^\omega = (st)^\omega$ des algèbres de Wilke,

et une opération de changement de pointeur reliant les termes construisant une même forme, mais l'un en itérant un motif, l'autre en l'itérant « n fois d'un coup », ce qui correspond à l'équation $(s^n)^\omega = (s)^\omega$ des algèbres de Wilke. N'ayant pas réussi à ce jour à prouver cette conjecture (il est très difficile de trouver une bonne hypothèse d'induction), nous avons étudié les axiomatisations des théories à point fixe présentes dans la littérature. A noter qu'une autre méthode de preuve de notre conjecture serait donc de montrer la complétude des équations de notre conjecture pour celles de ces théories.

Nous avons également déduit de la littérature une représentation catégorique des arbres rationnels indépendante de leur représentation finie.

Les arguments en faveur de sa validité

Les équations de notre conjecture sont très proches de celles des théories commutatives de Bloom et Ésik, qui relient précisément les représentations finies d'un même arbre rationnel. De plus, l'intérêt de notre conjecture est à la fois son aspect graphique simple et plus intuitif que certaines des équations des théories commutatives, et la forte probabilité qu'elle se généralise plus facilement au deux opérateurs de point fixe du μ -calcul que ces théories commutatives.

Le bilan et les perspectives

Il reste à prouver notre conjecture, puis à passer au μ -calcul tout entier. Une fois obtenues les équations reliant les formes finies de même expansion infinie, nous pourrions généraliser la notion de stratégie innocente à ce cadre et obtenir ainsi une version à points fixes de la sémantique des jeux, mais également de la logique tensorielle de Melliès.

Nous chercherons ensuite à poursuivre et développer dans ce cadre le travail de Luke Ong sur la décidabilité des formules du μ -calcul modal sur les schémas de récursion d'ordre supérieur.

Interprétation catégorique des arbres rationnels

Rapport de stage *

Charles Grellois

Introduction

L'étude de structures inductives apparaît dans diverses branches de l'informatique théorique, telles que la théorie des types, la théorie des langages, la logique, où l'on considère parfois des formules définies à l'aide de points fixes, ou encore la vérification de telles formules. Dans chacune de ces situations, l'induction permet d'engendrer un objet régulier à partir d'une représentation finie ; cependant le choix de celle-ci n'est pas canonique, et il apparaît une tension entre représentations finies et formes normales infinies, de sorte qu'il est crucial de savoir caractériser les représentations finies d'une même forme infinie. Dans le cas des mots infinis, la théorie équationnelle inhérente aux algèbres de Wilke permet d'identifier les représentations équivalentes d'une même forme normale régulière, c'est à dire d'un mot infini ultimement périodique. Se pose alors la question de la généralisation d'une telle théorie équationnelle aux structures arborescentes infinies munies d'une bonne notion de régularité, que nous allons étudier dans ce rapport ¹.

Ce travail s'inscrit dans la lignée d'un projet de conciliation de la sémantique des jeux et de la vérification des arbres produits par des structures récursives d'ordre supérieur à l'aide du μ -calcul modal, projet initié notamment par Luke Ong [30][17] (voir [15] pour une introduction). Notre but premier est de définir une bonne notion de sémantique des jeux pour les formules du μ -calcul, et d'obtenir pour cela une notion de catégorie de dialogue libre avec points fixes, dont les objets seront les formules du μ -calcul (vues comme des jeux) et les morphismes des stratégies aux bonnes propriétés entre ces formules. Durant ce stage, nous n'avons pu aborder que le problème plus restreint des formules définies à l'aide d'un seul point fixe, mais la généralisation semble en bonne voie.

*Sous la direction de Paul-André Melliès (Laboratoire Preuves, Programmes, Systèmes - CNRS, Université Paris Diderot - Paris, France)

1. Il ne s'agit pas à proprement parler d'une généralisation des algèbres de Wilke, celles-ci décrivant des *langages* de mots infinis à représentation finie, alors que nous étudions ici l'ensemble des représentations finies d'un seul arbre infini.

Cette meilleure compréhension des structures inductives devrait également permettre une interprétation plus précise du système de types inductifs utilisé par Ong et Kobayashi [22] pour la vérification des productions des schémas de récursion d'ordre supérieur, ce système de types simulant l'exécution d'un automate alternant à parité (et donc la vérification d'une formule du μ -calcul modal, cf [15, Section 3]) sur l'arbre généré par le schéma.

Nous allons tout d'abord introduire les algèbres de Wilke, puis commencer leur généralisation en introduisant la notion de régularité pour les arbres, en la justifiant par son lien avec les représentations finies données par des formules inductives ou, de façon équivalente, des formules définies à l'aide d'un point fixe (Section 1). Nous nous poserons ensuite la question de l'équivalence des représentations finies d'arbres rationnels, que nous aborderons sous plusieurs angles, et nous exposerons notre conjecture à ce sujet (Section 2). Nous passerons alors en revue les différentes axiomatisations de théories avec points fixes qui ont été étudiées dans le cadre de la théorie des catégories (Section 3), et les utiliserons pour interpréter librement les arbres rationnels dans de bonnes catégories à l'aide d'algèbres initiales de façon indépendante de la représentation finie choisie (Section 4). Nous exposerons alors brièvement diverses pistes pouvant mener à la généralisation de cette interprétation aux formules du μ -calcul (Section 5).

Une table des matières est disponible à la fin de ce document.

1 Descriptions inductives

Dans le cas des mots, il existe une théorie bien établie de la représentation finie des mots réguliers, c'est-à-dire ultimement périodiques : il s'agit de celle des algèbres de Wilke [10, Section 3.3.2].

1.1 Algèbres de Wilke et mots ultimement périodiques

Définition 1 (Algèbres de Wilke). On appelle *algèbre de Wilke* une algèbre à deux sortes $S = (S_+, S_\omega)$ munie des opérations suivantes :

- un produit associatif sur S_+ ,
 - un produit mixte $\cdot : S_+ \times S_\omega \rightarrow S_\omega$ tel que pour tout $(s, t, u) \in S_+^2 \times S_\omega$ on ait $s \cdot (t \cdot u) = (st) \cdot u$,
 - une application $(\cdot)^\omega : S_+ \rightarrow S_\omega$ telle que pour tout $(s, t) \in S_+^2$ on ait :
 - $s \cdot (ts)^\omega = (st)^\omega$
 - $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (s^n)^\omega = s^\omega$
- et telle que tout élément de S_ω se factorise sous la forme st^ω avec $(s, t) \in S_+^2$.

Un théorème de Wilke [34] montre l'équivalence des ω -semigroupes finis et des algèbres de Wilke finies, impliquant la proposition suivante :

Proposition 1. *Deux représentations finies d'un même mot ultimement périodique sont reliées par les égalité de la définition des algèbres de Wilke.*

Le résultat suivant, provenant de [7, Proposition 3], nous sera utile par la suite.

Proposition 2 (Infinitude de l'axiomatisation). *Les algèbres de Wilke n'admettent pas d'axiomatisation finie.*

Nous voulons maintenant étendre ce cadre aux structures arborescentes. Il nous faut pour cela étendre la notion d'ultime périodicité, et définir les représentations finies correspondantes.

1.2 Arbres rationnels et systèmes d'équations

Considérons une signature Σ , avec une notion d'arité. Les arbres - finis ou non - sur Σ sont définis de façon usuelle; on notera leur ensemble \mathcal{T}_Σ . L'ultime périodicité du cas linéaire va être remplacée par la notion d'arbre rationnel dûe à Courcelle [11, Section 4] :

Définition 2 (Arbre rationnel). Un arbre de \mathcal{T}_Σ est dit *rationnel* s'il a un nombre fini de sous-arbres. On notera \mathcal{R}_Σ le sous-ensemble de \mathcal{T}_Σ constitué des arbres rationnels.

Nous utiliserons dans la suite deux types de représentations finies de ces objets infinis, l'une sous forme de système d'équations sous-tendant l'utilisation d'un point fixe, l'autre sous forme d'un graphe avec contraintes. De façon plus générale, on considèrera aussi des forêts (dont les arbres sont ordonnés) munies de feuilles étiquetées par des variables et des paramètres; on dira qu'une forêt de n arbres sur $\Sigma \cup \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{a_1, \dots, a_p\}$, où les x_i et les a_j sont des variables d'arité nulle, est une opération $n + p \rightarrow n$. On notera $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ la forêt constituée des n arbres t_1, \dots, t_n dans cet ordre. On considèrera sur les forêts l'opération usuelle de composition par substitution.

Définition 3 (Système sur Σ). On appellera *système d'équations à p paramètres sur la signature Σ* une opération $n + p \rightarrow n$. Si la forêt correspondant à cette opération est composée d'arbres réduits à une opération de Σ d'arité 0, à un paramètre a_i ou à une opération de Σ d'arité $n \geq 1$ et de fils n variables x_{i_1}, \dots, x_{i_n} , on dira que ce système est *plat*. On appellera *solution* du système formé par l'opération $n + p \rightarrow n$ l'opération $p \rightarrow n$ obtenue en remplaçant inductivement chaque variable x_i de la forêt par le i -ème arbre de cette forêt, ce qui donne une forêt de n arbres dans laquelle les variables ont disparu. Cette solution n'est définie que s'il n'y a pas dans la forêt d'arbre réduit à une variable².

2. Ce qui, par définition, n'arrive pas dans les systèmes plats.

Sur la signature Σ , un système d'équations à p paramètres $n + p \rightarrow n$ est une forêt de n arbres t_1, \dots, t_n sur $\Sigma \cup \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{a_1, \dots, a_p\}$. Cela correspond intuitivement à :

$$\begin{cases} x_1 = t_1[x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p] \\ \dots \\ x_n = t_n[x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p] \end{cases}$$

et la solution de ce système est obtenue par substitution *ad infinitum*. Jusqu'à la section 3, nous n'utiliserons pas de paramètres : on aura $p = 0$.

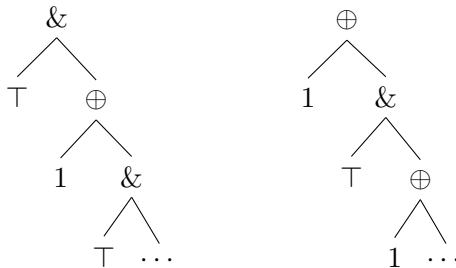
Exemple 1. Considérons la signature $\Sigma : \{\& : 2, \oplus : 2, \top : 0, 1 : 0\}$. On peut considérer l'opération $2 \rightarrow 2 + 0$ suivante (où le premier arbre est à gauche) :



qui correspond intuitivement à :

$$\begin{cases} x_1 = \top \& x_2 \\ x_2 = 1 \oplus x_1 \end{cases}$$

de solution intuitive la forêt composée de deux arbres infinis sans variables ni paramètres :



Notons que ce système n'est pas plat, car il y apparaît des constantes de Σ n'étant pas racine d'un arbre de la forêt. Pour obtenir un système plat, il faudrait ajouter deux variables x_3 et x_4 et les faire correspondre à 1 et \top , ce qui donne une opération $4 + 0 \rightarrow 4$.

Proposition 3. *Toute forêt obtenue comme solution d'un système d'équations $n + p \rightarrow n$ sur Σ peut être obtenue comme la projection des n premières composantes de la solution d'un système plat $m + p \rightarrow m$ ($m \geq n$).*

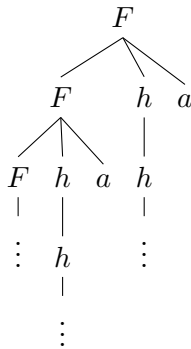
Il suffit pour cela d'ajouter suffisamment de nouvelles variables pour décomposer tous les sous-arbres. Ces systèmes permettent une représentation finie des arbres rationnels (et plus généralement des forêts de tels arbres, dites régulières).

Proposition 4 (Systèmes et régularité).

1. *Tout arbre rationnel sur Σ peut être obtenu comme la première projection de la solution d'un système plat (sans paramètres) sur Σ . Plus généralement, toute forêt régulière de p arbres peut être obtenue comme la projection des p premiers arbres de la solution d'un système plat sur Σ .*
2. *Tout système sans paramètres ayant une solution, qu'il soit plat ou non, engendre une forêt régulière.*

Le deuxième point est évident. Le premier s'obtient par définition des arbres rationnels : soit t un tel arbre et t_1, \dots, t_n une énumération de ses sous-arbres telle que $t = t_1$. Soit F_i le symbole de Σ figurant à la racine de t_i ; la racine de t est donc étiquetée F_1 . Alors t est le premier arbre de la forêt obtenue comme solution du système plat $n \rightarrow n$ dont la i -ème composante est $F_i(t_{i_1}, \dots, t_{i_{ar(F_i)}})$ avec i_j le numéro de l'arbre partant dans t_i en direction j .

Exemple 2. L'arbre rationnel sur la signature $\{F : 3, h : 1, a : 0\}$ suivant :



est la première composante de la solution du système plat suivant :



On peut également représenter de tels arbres à l'aide d'un opérateur de point fixe.

1.3 Théories munies d'un point fixe sur une signature et arbres rationnels

On considère ici une théorie munie d'un opérateur de point fixe μ sur une signature Σ , de termes appelés μ -termes et donnés par la grammaire $t ::= x \mid \sigma(t_1, \dots, t_n) \mid \mu x.t'$, où σ est un symbole n -aire de Σ , x est une variable et t' un terme non réduit à une variable (il s'agit d'une généralisation triviale à une signature quelconque de la théorie équationnelle usuelle utilisée en théorie des types inductifs, par exemple dans [9]), et dans laquelle l'égalité des termes est donnée par l' α -équivalence et par les règles suivantes, formalisant les égalités intuitives des points fixes :

$$\begin{array}{c}
\vdash t = t \qquad \frac{\vdash t_1 = t_2}{\vdash t_2 = t_1} \qquad \frac{\vdash t_1 = t_2 \quad \vdash t_2 = t_3}{\vdash t_1 = t_3} \\
\\
\frac{\vdash t_1 = t'_1 \quad \dots \quad \vdash t_n = t'_n \quad \sigma \in \Sigma \quad ar(\sigma) = n}{\vdash \sigma(t_1, \dots, t_n) = \sigma(t'_1, \dots, t'_n)} \\
\\
\frac{\vdash t_1 = t_2}{\vdash \mu x.t_1 = \mu x.t_2} \qquad \vdash \mu x.t = t[\mu x.t/x] \text{ (EXPANSION)}
\end{array}$$

FIGURE 1 – Règles de la théorie équationnelle des μ -termes.

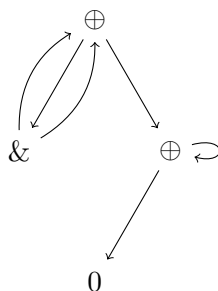
Un μ -terme est alors une représentation finie de la forme (éventuellement) infinie obtenue par l'utilisation (éventuellement) infinie de la règle d'expansion. On voit facilement que ces termes correspondent aux arbres rationnels (correspondance détaillée et exemple dans l'annexe A).

On peut alors représenter ces μ -termes par des μ -graphes, en s'inspirant du travail d'Ariola et Klop [4]. Les μ -graphes sont des arbres sur une signature Σ dans lesquels un sommet peut avoir pour fils un de ses prédécesseurs, c'est-à-dire qu'une arête peut partir d'un sommet pour pointer vers un sommet situé sur le chemin reliant la racine au sommet initial (on appellera de telles arêtes des pointeurs de retour ; on parle de *partage vertical*, par opposition au *partage horizontal* autorisé dans les graphes généraux). Ces

μ -graphes sont également munis d'une notion de direction : pour un symbole d'arité n étiquetant un sommet d'un μ -graphe, les n arêtes issues de ce sommet sont ordonnées par des directions de 1 à n - on représentera la direction 1 le plus à gauche et la n le plus à droite. Etant donné un μ -terme, on construit le μ -graphe le représentant comme suit (un exemple est disponible au début de l'annexe B) :

1. On représente le terme sous forme d'arbre avec des directions (un symbole apparaissant comme i -ème direction sera considéré sur l'arbre comme étant dans la i -ème direction depuis son père).
2. On enlève chaque variable liée X (apparaissant donc initialement comme une feuille) et on remplace l'arête qui pointait vers elle par une arête pointant vers le fils du lieu μX de X .
3. On enlève tous les lieux (de la forme μX), et on relie leur père à leur fils.

Exemple 3. Considérons la signature $\Sigma : \{\& : 2, \oplus : 2, \top : 0, 1 : 0\}$ et le μ -terme sur celle-ci $t = \mu x. \oplus (\&(x, x), \mu y. \oplus (0, y))$. Le μ -graphe correspondant est alors :



Le μ -graphe de l'expansion infinie d'un μ -terme correspond alors au déroulement infini du μ -graphe correspondant en un arbre, en effectuant des duplications pour enlever les pointeurs de retour. Dans la suite, on se concentrera sur l'étude des termes clos (de sorte que les μ -graphes n'aient pas de feuille étiquetée par une variable).

2 Equivalence des représentations finies d'une même arbre rationnel

Nous cherchons maintenant à avoir des équations reliant les descriptions finies d'un même objet infini. Nous allons voir que la théorie de l'égalité présentée ci-dessus est insuffisante pour cela. Dans un premier temps, nous nous intéressons aux représentations à l'aide de μ -termes.

2.1 Insuffisance de l'axiomatisation de la théorie avec point fixe

Une construction classique des entiers est donnée sur la signature $\{1 : 0, \oplus : 2\}$ par le terme $\mu X.1 \oplus X$, dont l'expansion infinie est le terme $1 \oplus (1 \oplus \dots)$. Intuitivement, chaque entier correspond à une branche finie de l'arbre correspondant : l'entier i correspond à la branche prenant à droite lorsqu'elle rencontre les i premiers \oplus , puis prenant à gauche sur le suivant. Il est cependant évident que l'expansion infinie dans cette même théorie de $\mu X.1 \oplus (1 \oplus X)$ aboutit au même arbre. Cependant, il est impossible d'égaliser ces deux termes par les règles de la figure 1, en effet toute dérivation se ramène au problème cyclique suivant :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\vdash 1 = 1} \quad \overline{\vdash 1 = 1} \quad \overline{\vdash \mu X.(1 \oplus X) = \mu X.(1 \oplus (1 \oplus X))}}{\vdash 1 \oplus 1 \oplus \mu X.(1 \oplus X) = 1 \oplus 1 \oplus \mu X.(1 \oplus (1 \oplus X))}}{\dots}}{\vdash \mu X.(1 \oplus X) = \mu X.(1 \oplus (1 \oplus X))}$$

On dira que deux termes égalisés par la théorie définie précédemment sont *faiblement équivalents*. A noter que cette équivalence est décidable [9, Théorème 3].

2.2 La règle manquante

Pour relier les représentations finies d'un même arbre rationnel, Amadio et Cardelli [3] et Ariola et Klop [4] ont proposé des axiomatisations plus complètes. Celle d'Ariola et Klop consiste à rajouter à la théorie équationnelle de la section 1.3 la règle suivante :

$$\frac{\vdash t_2 = t_1[t_2/x] \quad t_1 \neq x}{\vdash \mu x.t_1 = t_2}$$

On peut ainsi égaliser, par exemple, nos deux constructions des entiers :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\vdash 1 = 1} \quad \overline{\vdash \mu x.(1 \oplus x) = \mu x.(1 \oplus x)}}{\vdash 1 \oplus \mu x.(1 \oplus x) = 1 \oplus \mu x.(1 \oplus x)}}{\vdash 1 \oplus (1 \oplus \mu x.(1 \oplus x)) = 1 \oplus (1 \oplus \mu x.(1 \oplus x))}}{\vdash 1 \oplus \mu x.(1 \oplus x) = 1 \oplus (1 \oplus \mu x.(1 \oplus x))}}{\vdash \mu x.(1 \oplus x) = 1 \oplus (1 \oplus \mu x.(1 \oplus x))}}{\vdash \mu x.(1 \oplus (1 \oplus x)) = \mu x.(1 \oplus x)}$$

Cette règle a cependant le défaut d'être une implication, et non pas une égalité entre termes permettant de donner une présentation équationnelle

de la théorie obtenue. Nous verrons que cette théorie est complète, au sens où deux μ -termes sont identifiés si et seulement s'ils définissent les mêmes arbres réguliers. On dira que deux termes égalisés par une dérivation utilisant cette règle sont *fortement équivalents*. Cette équivalence est décidable [9] ; on peut pour cela utiliser une bisimulation.

2.3 Décision de l'équivalence par bisimulation

On veut décider si deux μ -termes t_1 et t_2 sur une signature Σ représentent la même forme infinie (le même arbre rationnel sur Σ). On commence pour cela par les traduire en deux systèmes d'équations les représentant (cette traduction, triviale, est détaillée dans l'annexe A.1), que l'on aplatit ensuite. On obtient ainsi deux systèmes $f : n \rightarrow n$ et $g : m \rightarrow m$; pour ne pas confondre les variables, on notera x_1, \dots, x_n celles du premier et y_1, \dots, y_m celles du second.

Définition 4 (Bisimulation). On appelle *bisimulation* pour les systèmes f et g une relation binaire $R \subset \{x_1, \dots, x_n\} \times \{y_1, \dots, y_m\}$ telle que si $(x_i, y_j) \in R$ on ait :

- Soit il existe un symbole $F \in \Sigma$ d'arité non nulle k telle que le i -ème arbre de la forêt f soit $F(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ et que le j -ème arbre de la forêt g soit $F(y_{j_1}, \dots, y_{j_k})$ et qu'on ait $\forall l \in \{1, \dots, k\} (x_{i_l}, y_{j_l}) \in R$,
- Soit il existe un symbole $a \in \Sigma$ d'arité nulle telle que le i -ème arbre de la forêt f soit réduit à sa racine étiquetée a et que le j -ème arbre de la forêt g soit également a .

Proposition 5. [9, Corollaire 2] *S'il existe une bisimulation entre les systèmes f et g contenant (x_i, y_j) , la i -ème projection de la solution de f et la j -ème projection de la solution de g sont le même arbre rationnel (et t_1 et t_2 sont donc fortement équivalents).*

Réciproquement, deux systèmes produisant le même arbre rationnel sont bisimilaires (par contraposition, deux systèmes non bisimilaires diffèrent d'au moins un sous-arbre et ne sont donc pas le même arbre rationnel).

D'après la proposition, si l'on a lors de la traduction de t_1 et t_2 en les systèmes plats f et g fait en sorte que ces termes soient représentés par la première solution de ces systèmes (comme dans l'annexe A), il suffit d'avoir une bisimulation contenant (x_1, y_1) pour que ces systèmes engendrent le même arbre. On peut décider de son existence à l'aide de l'algorithme suivant [9, Définition 18] :

Définition 5. Pour $n \geq 0$, on définit deux suites d'ensembles $C^n \subset \{x_1, \dots, x_n\} \times \{y_1, \dots, y_m\}$ et $O^n \subset \{x_1, \dots, x_n\} \times \{y_1, \dots, y_m\}$ par l'algorithme suivant :

- On pose $C^0 = \emptyset$ et $O^0 = \{(x_1, y_1)\}$.
- Tant que $O^n \neq \emptyset$, on construit C^{n+1} et O^{n+1} en posant tout d'abord $C^{n+1} := C^n$ et $O^{n+1} := O^n$ puis en considérant une à une toutes les paires (x_i, y_j) de O^n :

- Si le i -ème arbre de f est $F(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ et que le j -ème arbre de g est $F(y_{j_1}, \dots, y_{j_k})$, on ajoute (x_i, y_j) à C^{n+1} , on la retranche à O^{n+1} , et on ajoute à O^{n+1} toute paire (x_i, y_{j_l}) n'appartenant pas à C^n .
- Si le i -ème arbre de f et le j -ème de g sont tous deux un même symbole nulinaire de Σ , on retire (x_i, y_j) à O^{n+1} , et on l'ajoute à C^{n+1} .
- Si (x_i, y_j) ne remplit aucune des deux conditions ci-dessus, arrêter la définition : il n'y a pas de bisimulation entre f et g .

Cet algorithme parcourt simplement les systèmes de façon synchrone à partir de ce qui correspond aux racines des arbres générés, et vérifie que toutes les branches auront les mêmes étiquettes. L'algorithme termine par finitude du nombre de paires à examiner. S'il échoue, il n'y a pas de bisimulation ; s'il termine en N étapes, C^N est une bisimulation entre f et g . Un exemple d'exécution est disponible en annexe B.

Une bisimulation induit un graphe, défini comme suit :

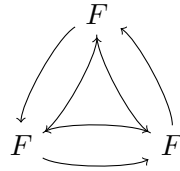
Définition 6 (Graphe d'une bisimulation). Le graphe d'une bisimulation R des systèmes f et g sur Σ est le graphe :

- ayant pour sommets les paires (x_i, y_j) contenues dans R , étiquetées par le symbole de Σ apparaissant en racine du i -ème arbre de f (et donc du j -ème de g),
- et ayant une arête $(x_i, y_j) \rightarrow (x_k, y_l)$ si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $i_m = k$ et $j_m = l$, où $F(i_1, \dots, i_n)$ et $F(j_1, \dots, j_n)$ sont respectivement le i -ème arbre de f et le j -ème de g .

Il n'y a donc d'arête $(x_i, y_j) \rightarrow (x_k, y_l)$ que si le système f contient ce qui correspond à l'équation $x_i = F(\dots, x_k, \dots)$, g ce qui correspond à $y_j = F(\dots, y_l, \dots)$ et que x_k et y_l sont des fils de F allant dans la même direction (c'est-à-dire apparaissant en même position parmi les arguments de F).

Il arrive que ce graphe ne soit pas un μ -graphe, comme dans l'exemple suivant :

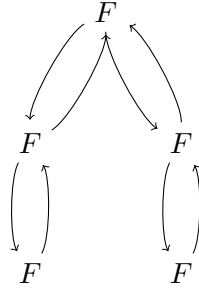
Exemple 4. Soit $\Sigma = \{F : 2\}$. On considère $t_1 = \mu x.F(x, F(x, x))$ et $t_2 = \mu x.F(F(x, x), x)$. Le graphe de la bisimulation est alors :



On définit donc le μ -graphe d'une bisimulation comme étant le μ -graphe obtenu par déploiement minimal de ce graphe en un μ -graphe. Il suffit pour

l'obtenir de remplacer tout pointeur violant l'interdiction du partage horizontal par une arête vers une nouvelle copie du sous-arbre cible. Pour plus de détails, voir [4, page 24].

Exemple 5. Le μ -graphe de la bisimulation de l'exemple précédent est :



2.4 Equivalence et fibrations

Plutôt que de se ramener à des systèmes plats, on peut chercher à travailler directement sur le μ -terme, et plus précisément sur sa représentation sous forme de μ -graphe. Pour relier diverses telles représentations, il nous faut une bonne notion d'homomorphisme.

Définition 7 (Homomorphisme de μ -graphes). On appelle homomorphisme $G_1 \rightarrow G_2$ de μ -graphes sur Σ tout couple d'applications (f_1, f_2) avec :

- f_1 une application des sommets de G_1 dans ceux de G_2 respectant les racines (la racine de G_1 doit être envoyée sur celle de G_2) et les étiquetages par Σ : un sommet d'étiquette $F \in \Sigma$ de G_1 doit être envoyé sur un tel sommet de G_2 ,
- f_2 une application des arêtes de G_1 dans celles de G_2 , de sorte qu'une arête $v \rightarrow v'$ dans G_1 soit envoyée sur une arête $f_1(v) \rightarrow f_1(v')$, et que cette arête corresponde à la même direction que son antécédente.

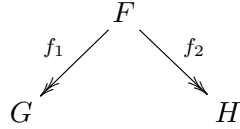
Un tel homomorphisme est dit *surjectif* lorsque f_1 et f_2 sont surjectives. On parle également de *fibration*.

Proposition 6. Deux μ -termes reliés par un homomorphisme surjectif de μ -termes ont le même déploiement infini.

Ceci provient du fait que, pour un $f = (f_1, f_2) : G \rightarrow H$ un homomorphisme surjectif de μ -termes, en notant V_H l'ensemble des sommets de H , $\bigcup_{v \in V_H} f_1^{-1}(v) \times \{v\}$ est une bisimulation contenant la paire des racines de G et H ³.

3. On a ici, par souci de concision, omis de traduire les μ -termes en les systèmes équivalents, sur lesquels est définie la notion de bisimulation. Après traduction, il est aisé de voir que la structure des homomorphismes de μ -termes et l'exigence de surjectivité contraignent précisément cet ensemble à être une bisimulation. Ensuite, on applique la proposition 5.

Proposition 7. *Deux μ -termes de même déploiement infini sont reliés par un span : si G et H sont deux μ -termes représentant la même forme infinie, il existe un μ -terme F et deux fibrations $f_1 : F \rightarrow G$ et $f_2 : F \rightarrow H$. Graphiquement :*



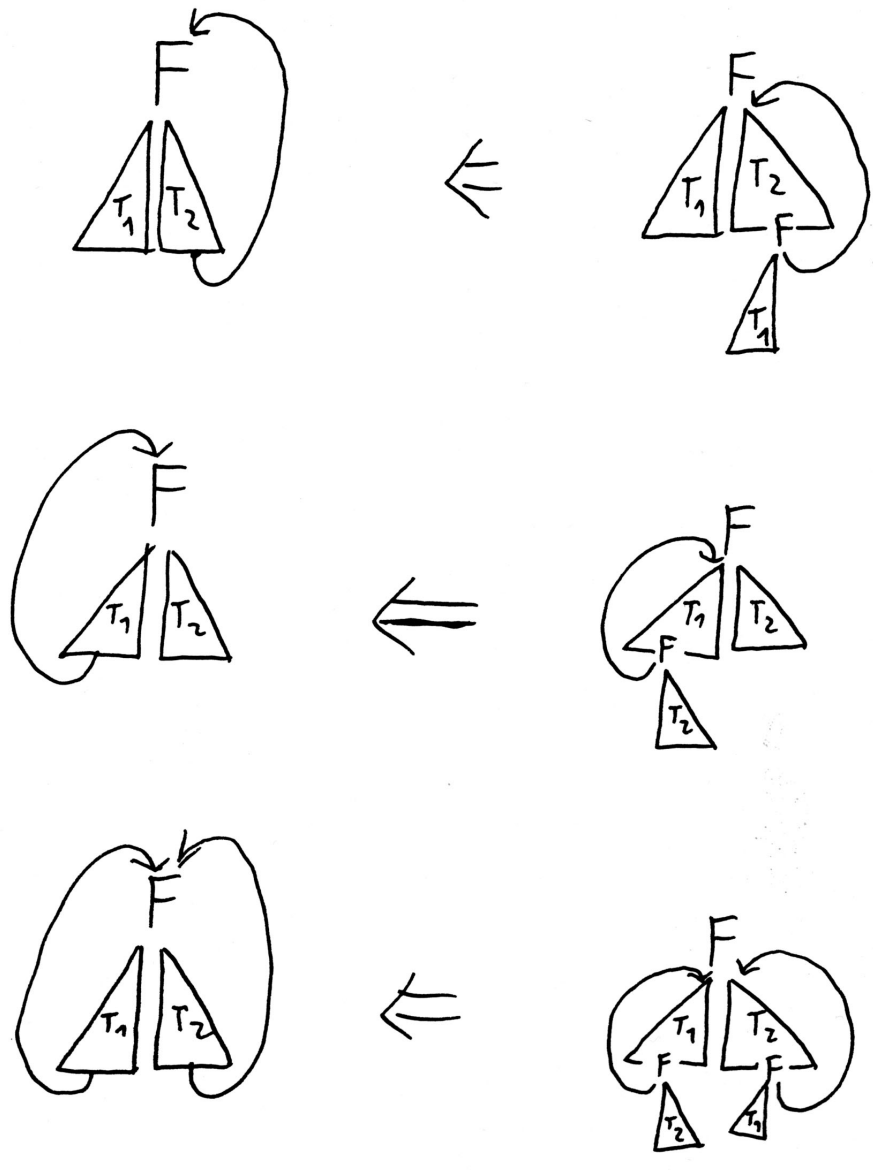
En particulier, on peut prendre pour F le μ -terme induit par la bisimulation existant entre les systèmes correspond à G et H , f_1 et f_2 étant respectivement les μ -fibrations induites par l'action sur les sommets de la première projection $(x_i, y_j) \mapsto x_i$ et de la seconde $(x_i, y_j) \mapsto y_j$.

On a donc équivalence du déploiement infini de deux μ -termes si et seulement si ils sont reliés par un span de fibrations. Reste maintenant à utiliser ceci pour obtenir une présentation équationnelle de cette équivalence.

2.5 Conjecture : un système de factorisation des fibrations

Nous avons cherché à décomposer les fibrations de μ -termes en des opérations de réécriture élémentaires. Notre conjecture est que les deux opérations suivantes suffisent à décomposer l'action de tout tel homomorphisme $f : G \rightarrow H$ (on notera F les occurrences de sommets de la même fibre) :

- La « roue » : dans le cas binaire :

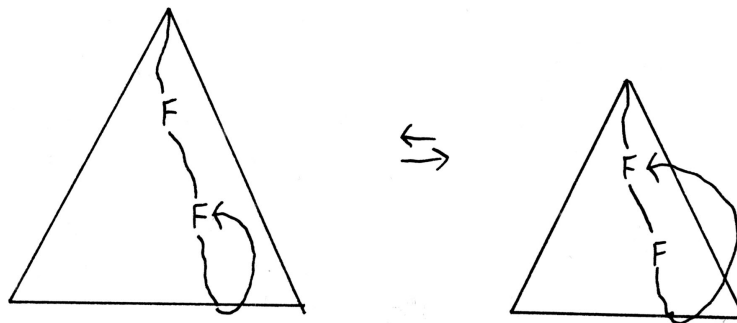


Dans le cas unaire, elle est assez évidente :



Et de même pour les arités supérieures.

- Le changement de pointeur : étant donné un pointeur de retour dans G , on peut changer sa cible pour un autre sommet à condition que celui-ci ait la même image par f dans H , et que ce changement respecte la structure de μ -graphe (on ne peut donc pas introduire de partage horizontal, ni pointer plus bas dans une branche). Graphiquement :



Ces opérations semblent décomposer l'action d'une fibration, de sorte que prendre ces étapes de réécriture comme égalités sur les μ -graphes devrait permettre d'arriver à une caractérisation équationnelle des classes d'équivalence pour la relation « être la représentation finie du même arbre rationnel ». Cependant, nous n'avons pas réussi à démontrer que ces opérations engendrent les fibrations, car la récurrence est particulièrement délicate. Rien ne dit, par exemple, que l'on n'ait pas une situation où l'on voudrait utiliser la roue mais où le sous-arbre que l'on veut « renrouler » n'est pas en forme normale, par exemple parce qu'il contient un pointeur de retour non déployé.

Il existe peut-être un argument combinatoire montrant qu'il existe toujours un motif sur lequel la roue est applicable, mais nous ne l'avons pas trouvé à ce jour. Il est possible qu'il faille utiliser la roue « à l'envers » sur des sous-arbres pour les déployer quand cela est nécessaire, afin d'utiliser la roue sur de plus gros motifs pour les réenrouler une fois que la bonne forme locale est acquise. Après de longues recherches, nous avons eu l'idée d'aller regarder dans un autre pan de la littérature si nous pouvions y trouver des axiomatisations des théories étudiées jusqu'ici ; nous avons donc cherché du côté des théories de Lawvere munies d'une opération d'itération, ainsi que nous allons le voir dans la section suivante.

3 Caractérisations équationnelles des propriétés de point fixe

Afin de dépasser les problèmes combinatoires liés à la preuve de notre conjecture, nous avons cherché dans la littérature les présentations équationnelles existantes de théories du point fixe. Il en existe plusieurs selon les propriétés désirées [32][6], un point fixe (paramétré) sur une théorie de Lawvere⁴ étant défini en toute généralité de façon peu contrainte.

Définition 8 (Théorie de Lawvere). On appelle *théorie de Lawvere* une catégorie \mathbb{L} munie des produits finis et d'un objet dit *générique* x tel que tout objet de \mathbb{L} soit isomorphe à une puissance cartésienne finie x^n de x .

Dans la suite, on abrègera souvent « théorie de Lawvere » en « théorie ». Une théorie de Lawvere, par sa structure cartésienne, contient donc au minimum les projections et les n -uplets de ses morphismes. On appellera une flèche $x^n \rightarrow x$ une *opération n -aire* de la théorie, et on dira souvent que c'est une flèche $n \rightarrow 1$. Par extension, un morphisme $x^p \rightarrow x^q$ sera qualifié d'opération $p \rightarrow q$. On notera 1_n l'identité $x^n \rightarrow x^n$, et \perp_n l'unique flèche $x^n \rightarrow x^0 \cong 1$ (où 1 est l'objet terminal de la théorie). Ces théories sont en fait une catégorification des présentations par générateurs et relations usuelles en logique : les morphismes de la théorie correspondent aux composés de générateurs et d'opérations sur les variables (substitution, duplication, ...) données par la structure cartésienne, et les relations sont encodées directement dans la loi de composition de la théorie. Deux exemples nous intéresseront particulièrement par la suite :

Exemple 6 (Deux théories de Lawvere).

- Etant donnée une signature Σ , on obtient une théorie notée Rat_Σ des systèmes sur cette signature en fixant un ensemble d'objets de la forme x^n , $n \in \mathbb{N}$ et en prenant pour opérations $n + p \rightarrow n$ les systèmes sur Σ à n variables et p paramètres. La composition dans cette catégorie correspond à la substitution usuelle des variables et paramètres par les arbres de la forêt avec laquelle on compose. On a bien une structure cartésienne, le produit de deux forêts étant obtenu en les « plaçant côte à côte », et les projections correspondent à sélectionner un arbre de la forêt.
- Etant donnée une catégorie \mathcal{C} , on a une théorie $Th_{\mathcal{C}}$ dont l'objet distingué est \mathcal{C} et les opérations $p \rightarrow q$ sont les foncteurs $\mathcal{C}^p \rightarrow \mathcal{C}^q$. La structure cartésienne provient de celle de CAT .

Définition 9 (Théorie de la prétération). On dit qu'une théorie de Lawvere est une *théorie de la prétération* si elle est munie d'une opération

4. Pour plus de détails concernant ces théories, on pourra par exemple consulter mon mémoire de Master de Mathématiques, qui portait sur le lien entre théories algébriques, monades à arités et algèbre de dimension supérieure [16].

additionnelle $(\cdot)^\dagger$ envoyant une opération $f : n + p \rightarrow n$ sur une opération $f^\dagger : p \rightarrow n$.

En d'autres termes, on a sur les opérations de cette théorie un opérateur qui « fait disparaître les variables »⁵. Cela n'en fait pas pour autant un opérateur de point fixe et le munit encore moins des propriétés habituelles ; il faut donc rajouter des conditions sur cet opérateur.

3.1 Théories de Conway

Définition 10 (Théorie de Conway). Une théorie de Conway est une théorie de la préitération \mathbb{L} satisfaisant les trois propriétés suivantes :

- *Naturalité* : Pour deux opérations $f : n + q \rightarrow n$ et $g : p \rightarrow q$, on a $f^\dagger \circ g = (f \circ (1_n \times g))^\dagger : p \rightarrow n$.
- *Dinaturalité paramétrée* : Pour deux opérations $f : m + p \rightarrow n$ et $g : n + p \rightarrow m$ on a :
 $f \circ \langle (g \circ \langle f, \pi_{m+1}, \dots, \pi_{m+p} \rangle)^\dagger, 1_p \rangle = (f \circ \langle g, \pi_{n+1}, \dots, \pi_{n+p} \rangle)^\dagger$
- *Propriété diagonale* : Pour toute opération $f : n + n + p \rightarrow n$, on a $(f \circ (\Delta_n \times 1_p))^\dagger = (f^\dagger)^\dagger$.

La naturalité correspond à dire qu'on peut modifier les paramètres avant ou après avoir résolu le système (ce qui ne correspond à rien dans notre conjecture, puisque nous travaillons alors sans paramètres), la dinaturalité généralise l'équation $s \cdot (ts)^\omega = (st)^\omega$ des algèbres de Wilke et semble correspondre à notre opération de roue, et la propriété diagonale correspond à la propriété du μ -calcul que Niwinski appelle la « *golden rule* » : $\mu x. \mu y. t[x, y] = \mu z. t[z/x, z/y]$ - elle n'a pas de pendant dans notre conjecture, puisque nos pointeurs ne sont pas étiquetés par un nom de variable. Ceci montre cependant qu'il faut pouvoir appliquer la roue à un ou plusieurs endroits pointant vers le même nœud de façon simultanée.

Proposition 8. *Une théorie de Conway a la propriété de point fixe paramétré : pour toute opération $f : n + p \rightarrow n$, $f \circ \langle f^\dagger, 1_p \rangle = f^\dagger$.*

Ceci résulte de l'application directe de la dinaturalité paramétrée à f comme dans l'énoncé et $g = \langle \pi_1, \dots, \pi_n \rangle$.

Il existe plusieurs axiomatisations de ces théories (ainsi que de celles que nous exposerons par la suite), qui sont notamment rappelées dans [6, Section 6.8]. La propriété suivante, qui est un axiome dans certaines présentations alternatives, permet de résoudre un système composante par composante :

Proposition 9 (Propriété de Bekic). *Dans une théorie de Conway, pour deux opérations $f : n + m + p \rightarrow n$ et $g : n + m + p \rightarrow m$, en posant $h := g \circ \langle f^\dagger, 1_{m+p} \rangle$, on a $\langle f, g \rangle^\dagger = \langle f^\dagger \circ \langle h^\dagger, 1_p \rangle, h^\dagger \rangle$.*

5. Depuis l'introduction de la notion de trace sur une catégorie monoïdale [21], on comprend mieux cela en termes de prise de trace sur les n sorties, voir l'annexe D pour plus de détails.

En termes usuels, ceci correspond à dire que l'on peut résoudre le système de paramètre p :

$$\begin{cases} x = f(x, y, p) \\ y = g(x, y, p) \end{cases}$$

en résolvant d'abord $x = f(x, y, p)$ de paramètre (y, p) , puis en injectant cette solution dans l'autre équation qui ne dépend alors plus que de la variable y et du paramètre p .

Une insuffisance de cette axiomatisation apparaît rapidement : elle ne permet pas de déduire que $f : n \rightarrow n$ vérifie $f^\dagger = (f \circ f)^\dagger$. Si on prend Th_{Set} munie d'une bonne notion d'itération (ce seront les algèbres initiales, voir section 4.1), on ne peut par exemple pas y affirmer que les endofoncteurs $F_1(X) = 1 + X$ et $F_2(X) = 1 + (1 + X)$: revoilà notre problème de l'identification de deux constructions des entiers...

3.2 Théories de l'itération

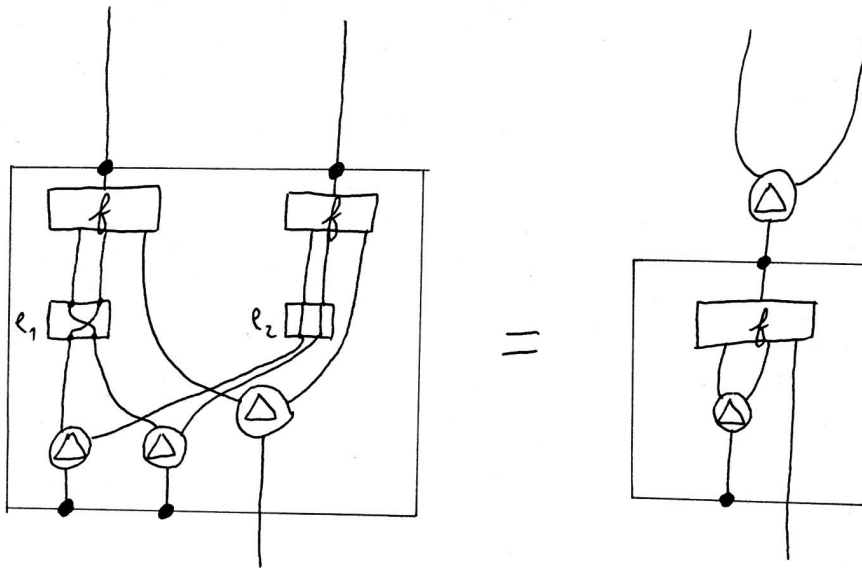
Bloom et Ésik [6] ont pour cela proposé l'ajout d'une classe d'égalités à exiger du point fixe, il s'agit des *identités commutatives*. Il en existe plusieurs versions, cf [6, chapitres 5 et 6] et [32, Section 2]. On expose ici une adaptation de la variante simplifiée de Simpson et Plotkin [32] :

Définition 11 (Théorie de l'itération). Une théorie de l'itération est une théorie de Conway satisfaisant les identités commutatives : en posant $n \times m = n + \dots + n$ (m fois) et $p_i : n \times m + p \rightarrow n$ la projection⁶ de la i -ème copie de n dans $m \times n$, on demande que pour toute opération $f : n \times m + p \rightarrow n$ et pour tous morphismes ρ_1, \dots, ρ_m tels que $\rho_i = \langle p_{i_1}, \dots, p_{i_m} \rangle$ on ait $\langle f \circ (\rho_1 \times 1_p), \dots, f \circ (\rho_m \times 1_p) \rangle^\dagger = \Delta_m \circ (f \circ (\Delta_m \times 1_p))^\dagger : p \rightarrow n \times m$.

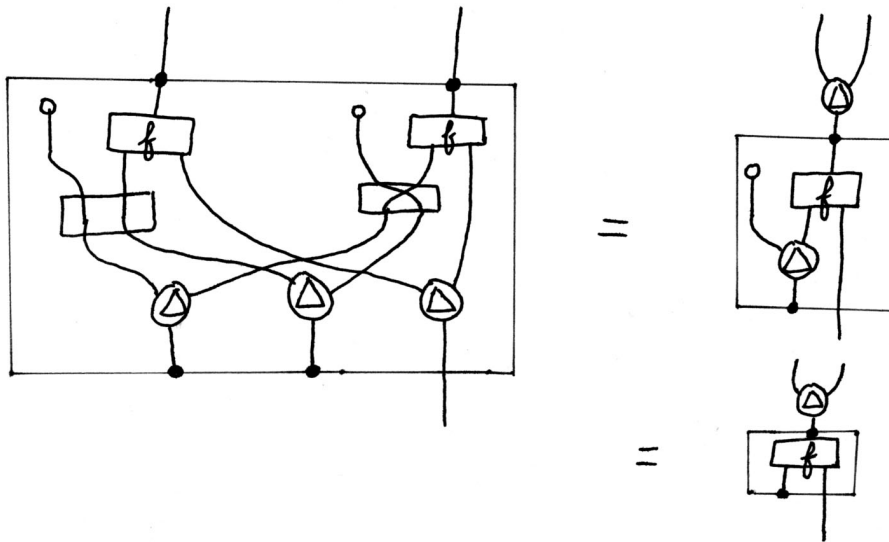
Pour mieux comprendre ces équations complexes, il convient d'utiliser une représentation par des diagrammes de corde⁷ [27] auxquels on ajoute une boîte représentant l'opération de point fixe. Les gros points représentent les branchements d'itération. Lorsque le point fixe est pris sur plusieurs variables, on considèrera que la sortie la plus à gauche est branchée sur l'entrée la plus à gauche, et ainsi de suite. Représentons donc un exemple d'identité commutative pour $p = n = 1$ et $m = 2$:

6. Formellement, $p_i = \langle \pi_{(i-1) \times n+1}, \dots, \pi_{(i-1) \times n+n} \rangle : n \times m + p \rightarrow n$.

7. On considère ici que le flux de calcul va de bas en haut dans les diagrammes.



Ceci implique en particulier que, pour $f : n \rightarrow n$, $(f \circ \dots \circ f)^\dagger = f^\dagger$ (ceci se généralise à une opération à paramètres $n + p \rightarrow n$, en ajoutant des identités 1_p là où c'est nécessaire). En voici la preuve pour le cas $k = 2$: il suffit de prendre $\perp_n \times f : n \times 2 \rightarrow n$, $\rho_1 = \langle p_1, p_2 \rangle$ et $\rho_2 = \langle p_2, p_1 \rangle$. Graphiquement, ceci signifie que (là encore on prend $n = 1$ pour la représentation, pour généraliser à n quelconque il suffit de remplacer chaque trait par n traits) :



et en termes plus usuels, ceci signifie qu'il y a équivalence entre ces deux systèmes :

$$\begin{cases} x_1 = (\perp_n \times f)(x_1, x_2) = f(x_2) \\ x_2 = (\perp_n \times f)(x_2, x_1) = f(x_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = (\perp_n \times f)(x_1, x_1) = f(x_1) \end{cases}$$

Ceci se généralise bien entendu à toute composée de $k \in \mathbb{N}$ occurrences de f . Ces identités commutatives correspondent sur les μ -graphes aux identifications telles que celle de ces deux systèmes, ce qui ressemble fortement à l'opération de changement de pointeur de notre conjecture.

La difficulté de manipulation de ces identités commutatives⁸ a conduit à la recherche d'axiomatisations les impliquant. Plusieurs d'entre elles sont présentées dans [6], nous considérerons celle qui s'est avérée la plus exploitée par la suite : celle de *fonctorialité* (aussi appelée *uniformité paramétrique*), explorée notamment dans [32] et [2].

3.3 Théories d'Elgot

Définition 12 (Théorie d'Elgot). Une théorie d'Elgot est une théorie de Conway dans laquelle pour toutes opérations $f : n + p \rightarrow n$, $g : m + p \rightarrow m$ et $h : n \rightarrow m$, on a que $h \circ f = g \circ (h \times 1_p)$ implique que $g^\dagger = h \circ f^\dagger$.

Proposition 10. *Toute théorie d'Elgot est une théorie de l'itération.*

Proposition 11. [12, Section 3] *Il existe une théorie commutative qui n'est pas d'Elgot.*

On trouvera la preuve de ces deux propositions en annexe C. On a néanmoins le résultat suivant :

Proposition 12. [6, Corollaire 6.5.4] *Toute théorie commutative est quotient d'une théorie d'Elgot. En particulier, les théories commutatives libres sont des théories d'Elgot libres.*

Remarque 1 (Sur le problème de la présentation équationnelle des théories d'Elgot). Un problème des théories d'Elgot est qu'elles ne sont pas à proprement parler équationnelles : la propriété de fonctorialité est une implication. Cependant, Adamek, Milius et Velebil [2] ont montré qu'il existe une version équationnelle de ces théories dans le cas particulier des arbres non pas sur une signature mais sur un « ensemble avec contexte », c'est-à-dire non pas sur la catégorie des signatures mais sur Set^{Finset} la catégorie des foncteurs allant des ensembles finis vers les ensembles. La catégorie d'Eilenberg-Moore de la monade des arbres rationnels sur cette catégorie est alors équivalente à la catégorie des théories d'Elgot. Cette monade est finitaire [16] ; un résultat de Kelly et Power assure alors qu'elle a une présentation

8. Que l'on doit considérer en nombre infini, par équivalence dans le cas $m = 1$ avec les algèbres de Wilke, cf [7] - cependant, il existe un moyen de restreindre l'ensemble ρ_i à considérer, cf [13], tout en conservant une axiomatique infinie.

équationnelle. Cependant, cette présentation n'est pas connue, la notion d'arité [28] obtenue pour cette monade (et donc pour la théorie correspondante [16]) n'étant pas suffisamment manipulable pour pouvoir l'exhiber. Il faudrait donc raffiner l'étude de l'arité de cette monade afin d'obtenir une présentation équationnelle de la théorie d'Elgot associée.

3.4 Arbres rationnels et théories libres

Il reste maintenant à étudier le lien entre notre problème de représentation finie des arbres rationnels et ces théories.

Proposition 13. *Etant donnée une signature Σ , Rat_Σ est une théorie d'Elgot (où l'opérateur d'itération est défini par substitution infinie, comme dans la définition 3).*

On trouvera des éléments de preuve en annexe C. Un des avantages de la présentation catégorique des théories de l'itération est qu'elle permet de définir de manière simple un morphisme entre théories comme un morphisme de théories de Lawvere préservant l'opération d'itération :

Définition 13. On appelle *morphisme de théorie de l'itération* $\mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$ un foncteur $F : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$ préservant les produits, envoyant l'objet distingué de \mathbb{L}_1 sur celui de \mathbb{L}_2 , et respectant l'itération, c'est-à-dire que pour toute opération $f : n + p \rightarrow n$, on demande que $F(f^\dagger) = F(f)^\dagger$.

Fixons une signature Σ , on considère les termes sur celle-ci, et on note leur ensemble Σ_{term} . Il existe un morphisme d'inclusion de théories évident $\eta : \Sigma_{term} \rightarrow Rat_\Sigma$, qui envoie un terme sur l'arbre fini (donc rationnel) correspondant, de sorte que Σ_{term} est une sous-théorie (de l'itération) de Rat_Σ . Nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental qui caractérise les arbres rationnels comme étant les opérations de la théorie de l'itération libre.

Théorème 1 (*Rat_Σ est la théorie de l'itération libre sur Σ .*). [6, Théorème 4.24] *Soit T une théorie de l'itération et soit $\phi : \Sigma_{term} \rightarrow T$ un morphisme de telles théories. Il existe alors un unique morphisme de théories de l'itération ψ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
 & Rat_\Sigma & \\
 \eta \nearrow & & \searrow \psi \\
 \Sigma_{term} & \xrightarrow{\phi} & T
 \end{array}$$

Ceci signifie que les représentations finies d'un arbre rationnel sur une signature sont exactement reliées par les équations de théorie de l'itération⁹. Un

9. Rat_Σ est également la théorie itérative libre et la théorie d'Elgot libre sur Σ .

moyen de prouver notre conjecture serait donc de montrer que les équations sous-jacentes sont équivalentes à celles des théories de l'itération. Cela permettrait de remplacer les identités commutatives, bien complexes, par une notion de « changement de pointeur préservant la sémantique », et de se placer dans un cadre d'étude graphique agréable.

3.5 Itération et traces

Ce sujet est développé dans l'annexe D.

4 Une interprétation catégorique des arbres rationnels

Nous avons parlé de la théorie de Lawvere $Th_{\mathcal{C}}$ associée à une catégorie, mais n'avons pas encore discuté de son extension en une théorie munie d'un point fixe. L'opération $(\cdot)^\dagger$ sera donnée, pour des catégories convenables, par la notion d'algèbre initiale de foncteur.

4.1 Algèbres initiales et induction

Les algèbres initiales généralisent la notion de plus petit point fixe : sur une catégorie représentant un ordre, on exprime la propriété $f(x) \leq x$ par une flèche $f(x) \rightarrow x$. On généralise ici cette idée, par la définition suivante :

Définition 14 (Algèbre d'un foncteur). Soit un endofoncteur F d'une catégorie \mathcal{C} . Une F -algèbre est la donnée (X, α) d'un objet X et d'une flèche $F X \xrightarrow{\alpha} X$ de \mathcal{C} .

Définition 15 (Morphisme d'algèbres). Etant données deux algèbres (X, α) et (Y, β) , un morphisme d'algèbres $(X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta)$ est une flèche $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} faisant commuter :

$$\begin{array}{ccc} F X & \xrightarrow{F f} & F Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Proposition 14. *Etant donné un endofoncteur F d'une catégorie \mathcal{C} , ses algèbres et leurs morphismes forment une catégorie.*

Définition 16 (Algèbre initiale). On appelle *algèbre initiale* de l'endofoncteur F un objet initial de la catégorie de ses algèbres et de leurs morphismes.

Proposition 15. (Lambek [24]) Si (X, α) est une algèbre initiale de l'endofoncteur F , $FX \xrightarrow{\alpha} X$ est un isomorphisme dans \mathcal{C} .

Un théorème dû à Adamek permet de calculer ces algèbres dans certains cas, et montre la nature inductive de ces constructions :

Théorème 2 ((Adamek)). Si \mathcal{C} est une catégorie dotée d'un objet initial 0 et possédant les colimites des ω -chaînes (c'est à dire des chaînes infinies dénombrables $a \rightarrow b \rightarrow \dots$), et que F est un endofoncteur de \mathcal{C} préservant les colimites d' ω -chaînes, alors l'objet colimite de l' ω -chaîne :

$$0 \xrightarrow{i} F0 \xrightarrow{Fi} FF0 \xrightarrow{FFi} \dots$$

induit une structure d'algèbre initiale pour F .

Ceci implique notamment que tout endofoncteur polynômial (de la forme $FX = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \times X^n$) de Set a une algèbre initiale. Construisons ainsi les entiers.

Exemple 7. Soit $F : Set \rightarrow Set$ tel que $FX = 1 + X$. Par ce théorème d'Adamek, la colimite de la chaîne des itérés de F sur l'objet initial \emptyset donne une algèbre initiale de F . Par conséquent, $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ en est une¹⁰, ce qui nous donne une définition de \mathbb{N} . La propriété de Lambek exprime alors le fait usuel suivant : $1 + \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.

Plus généralement, ceci permet de construire dans Set les arbres rationnels sur une signature Σ : on note Σ_n l'ensemble des symboles n -aires de Σ , et on crée ainsi un foncteur polynômial $F_\Sigma : X \mapsto \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n \times X^n$. Si l'on veut créer des arbres rationnels avec des variables, il faut considérer une version paramétrée de ce foncteur $F_\Sigma : (X, Y) \mapsto Y + \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n \times X^n$ (foncteur étudié en détails dans [1] notamment). Il est donc nécessaire de passer aux algèbres initiales paramétrées (cf [31, Section 2.2]) :

Définition 17 (Algèbre initiale paramétrée). Etant donné un foncteur $F : \mathcal{D} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que pour tout objet $e \in \mathcal{E}$ l'endofoncteur $F(-, e) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ait une algèbre initiale $(F^\mu(e), \alpha_e)$, il existe une unique façon de transformer la collection des objets $(F^\mu(e), \alpha_e)_{e \in \mathcal{E}}$ en un foncteur F^μ tel que la collection des α_d soit un isomorphisme naturel de $F(F^\mu(-), -)$ sur $F^\mu(-)$: si $f : e \rightarrow e'$ est une flèche de \mathcal{E} , on définit $F^\mu(f)$ comme l'unique morphisme de $F(-, e)$ -algèbres de l'algèbre initiale $(F^\mu(e), \alpha_e)$ vers l'algèbre $(F^\mu(e'), \alpha_{e'} \circ F(F^\mu(e'), f))$. On appelle le foncteur $F^\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ ainsi obtenu l'algèbre initiale paramétrée de F .

¹⁰. Par initialité, il peut y avoir plusieurs algèbres initiales d'un même foncteur, mais elles sont alors toutes isomorphes.

Ceci vaut en particulier lorsque \mathcal{D} et \mathcal{E} sont des puissances cartésiennes d'une catégorie \mathcal{C} , et permet donc de définir un point fixe paramétré par prise de telle algèbre initiale sur les opérations $n + p \rightarrow n$ d'une (sous)-théorie de $Th_{\mathcal{C}}$. Tous les résultats précédents passent sans difficulté à ce cadre paramétré.

4.2 Algèbres initiales et théories de l'itération

Si \mathcal{C} est une catégorie dotée d'un objet initial et ayant les colimites des ω -chaînes, toutes ses puissances cartésiennes ont la même propriété. On peut alors poser $Th_{\mathcal{C}}^{\omega}$ la sous-théorie de $Th_{\mathcal{C}}$ dont les morphismes $n + p \rightarrow n$ sont les foncteurs $\mathcal{C}^{n+p} \rightarrow \mathcal{C}^n$ préservant les ω -colimites. En prenant pour $(\cdot)^{\dagger}$ l'opération de prise d'algèbre initiale (construite par le théorème d'Adamek), on a :

Théorème 3. [14, Proposition 9 et Théorème 11] *$Th_{\mathcal{C}}^{\omega}$ est une théorie de l'itération à isomorphisme près, c'est-à-dire que les équations de ces théories y sont valides à isomorphisme près¹¹.*

Plus généralement, cette proposition et ce théorème d'Esik et Labella impliquent que toute sous-théorie de Lawvere de $Th_{\mathcal{C}}$ munie d'une opération de point fixe définie sur toutes les flèches par prise d'algèbre initiale est une théorie de l'itération à isomorphisme près lorsqu'elle vérifie la condition de naturalité (exprimée dans la définition des théories de Conway).

4.3 Interprétation catégorique des arbres rationnels

On peut maintenant interpréter les arbres rationnels sur une signature Σ dans des catégories munies des bonnes propriétés. Soit donc \mathbb{L} une sous-théorie de Lawvere d'une théorie $Th_{\mathcal{C}}$ qui soit une théorie de l'itération. Par conséquent, pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}$, les opérations $n \rightarrow m$ de cette théorie sont des foncteurs $\mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^m$ avec une notion d'itération par algèbre initiale. Soit Ξ une opération envoyant chaque symbole n -aire de Σ sur une opération $n \rightarrow 1$ de \mathbb{L} . On définit l'interprétation $\|t\|$ d'un μ -terme t de variables dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ comme le foncteur $\mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}$ défini comme suit :

- Si $t = x_i$, $\|t\| := \pi_i$.
- Si $t = F(t_1, \dots, t_k)$, $\|t\| := (\Xi(F))(\|t_1\|, \dots, \|t_k\|)$.
- Si $t = \mu x.t'$, on prend l'algèbre initiale de $\|t'\|$ sur la composante correspondant à x et paramétrée par les n autres.

Pour un terme clos, on obtient ainsi un foncteur de la catégorie terminale dans \mathcal{C} , qui sélectionne donc un objet de cette catégorie. Cet objet sera considéré comme l'interprétation dans \mathcal{C} du terme. Soit maintenant T l'arbre rationnel que l'on veut interpréter, et soit t un μ -terme le représentant. t

11. Dans la mesure où la propriété de Lambek donne un isomorphisme et non pas une égalité, on ne pouvait pas prétendre à mieux.

est donc clos, et correspond à un objet de \mathcal{C} que l'on définit comme l'interprétation de l'arbre rationnel T dans \mathcal{C} . Puisque l'on travaille dans une théorie de l'itération, d'après les résultats des sections précédentes, cette interprétation est indépendante du choix de la représentation finie de T par un μ -terme t .

5 Vers une sémantique catégorique du μ -calcul : perspectives et conjectures

Nous aimerions maintenant élargir ce cadre à celui des structures engendrées par l'utilisation conjointe de deux points fixes. La première question à résoudre est celle du pendant des arbres rationnels : nous conjecturons qu'il s'agira d'arbres rationnels munis d'une condition de gain sur leurs branches infinies, dont les représentations finies seront alors des jeux de parité, ou de façon équivalente des termes du μ -calcul [23][8]. Il faudra alors chercher une présentation équationnelle de l'égalité entre les formes finies d'un même objet infini, et il semble que notre conjecture soit bien plus apte à s'adapter au cadre des points fixes multiples que les présentations équationnelles étudiées dans la section 3. On pourra ensuite s'inspirer du travail de Santocanale [31] sur l'interprétation des jeux de parité dans la catégorie des ensembles pour donner une interprétation de ces jeux étendue à une plus grande variété de catégories. Le plus grand point fixe, et donc la coinduction, sera interprété de façon usuelle à l'aide de coalgèbres terminales, qui sont duales des algèbres initiales. Il reste cependant à réfléchir à la nature de la théorie équationnelle sous-jacente à ces coalgèbres : formellement, lors de la dualisation, les produits apparaissant dans les équations des théories du point fixe deviennent des sommes. Cela n'est peut-être pas problématique.

Il est également possible qu'il ne soit pas nécessaire de mêler les points fixes au sein d'une même catégorie, mais qu'on doive les interpréter dans deux univers différents, en s'inspirant des idées issues de la polarisation en logique. On pourrait alors ajouter aux formules une notion de « shift » faisant passer de l'univers inductif à l'univers coinductif, et enrichir ainsi la notion de paire chirale de Melliès et l'idée de logique « polychrome » qui la sous-tend [29]. Cette approche « polarisée » aurait l'avantage de permettre une représentation plate des systèmes équationnels à plusieurs points fixes, ce qui semble être une requête naturelle. On observe cette polychromie à l'oeuvre dans le travail de Baelde [5], où les points fixes μ et ν définissent une sorte de « polarisation » différente, indépendante de celle des connecteurs usuels, ce qui amène à penser que les paires chirales se généraliseraient en fait en quatre catégories d'interprétation reliées par des opérateurs de type « shift » correspondant aux ensembles d'opérations suivantes :

	Mode inductif	Mode coinductif
Joueur / Positif	\otimes, \oplus, μ	\otimes, \oplus, ν
Opposant / Négatif	$\wp, \&, \mu$	$\wp, \&, \nu$

Ceci est également suggéré par la structure des jeux de parité, dans lesquels les notions d'appartenance d'un sommet à un joueur et de coloration du sommet sont totalement décorrélées.

La résolution de ces questions permettra de définir proprement les objets d'une catégorie de dialogue avec points fixes, qui sera donc un modèle de logique tensorielle [33] avec points fixes. Une des conséquences sera l'existence d'une notion élémentaire de parallélisme sur les formules, donnée par le tenseur qui correspond à une forme très naive de produit parallèle. Pour parvenir à cette catégorie de dialogue, il faudra également étudier la bonne notion de stratégie entre formules, et plus particulièrement la bonne notion d'*innocence* sur ces structures. Il est probable qu'elle fasse intervenir des notions de régularité semblables à celles des objets, puisque l'innocence est une caractérisation de finitude du nombre d'états internes de la stratégie [25] [26]; plus précisément, les stratégies innocentes (sur des jeux d'arène usuels [20]) sont positionnelles, fait que l'on veut généraliser aux jeux avec points fixes pour obtenir un théorème général de positionnalité traversant sémantique des langages de programmation et vérification.

De plus, la notion d'innocence sur les stratégies est celle qui correspond au comportement calculatoire des schémas de récursion d'ordre supérieur [30] : une bonne généralisation de cette notion dans le cadre des jeux à points fixes devrait ainsi permettre des avancées dans le projet initié par Luke Ong à la frontière de la sémantique et de la vérification.

A Termes d'une théorie à point fixe sur une signature et arbres rationnels

A.1 Des termes aux arbres

Soit t un terme d'une théorie à point fixe sur une signature Σ . On définit un système sans paramètres sur Σ comme suit :

1. Si le terme n'est pas de la forme $\mu x.t'$, on le remplace par $\mu x.t$ où x n'apparaît pas dans t (de sorte que $t = \mu x.t$ dans la théorie équationnelle considérée, par la règle d'expansion).
2. On α -renomme les variables de sorte que tous les lieux portent sur des identifiants de variable distincts x_1, \dots, x_n et que x_1 corresponde au lieu en tête du terme.
3. On crée un système $n \rightarrow n$ comme suit : pour chaque sous-terme $\mu x_i.t_i$ on introduit dans la forêt (à la i -ème position) le terme t_i représenté

comme un arbre et dans lequel toute occurrence d'un sous-arbre de racine μx_j est remplacée par la feuille x_j .

La première composante de la solution du système est alors un arbre rationnel correspondant au déploiement infini du μ -graphe décrivant le terme initial.

A.2 Des arbres aux termes

Etant donné un arbre rationnel, on a d'après la proposition 4 un système plat $\langle t_1, \dots, t_n \rangle : n \rightarrow n$ (les t_i étant considérés, selon le contexte, comme les arbres de la forêt sous-jacente au système ou comme les termes auxquels ils correspondent) dont il est la première composante de la solution. On définit alors inductivement un terme t clos correspondant à cet arbre comme suit :

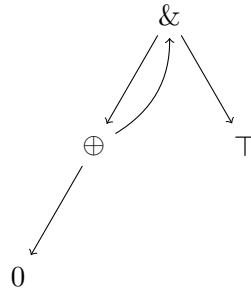
1. Tout d'abord, $t := \mu x_1.t_1$.
2. Ensuite, tant que ce terme n'est pas clos, on remplace toute occurrence d'une variable libre x_i par $\mu x_i.t_i$.

Ce processus termine et donne ainsi un terme fini : après un nombre fini de substitutions, toute variable préalablement libre se retrouvera dans le champ d'un lieu. En fait, le système étant plat, la représentation arborescente du terme obtenu fait alterner les lieux et les symboles de Σ , de sorte que toute branche est de longueur au plus $2n$.

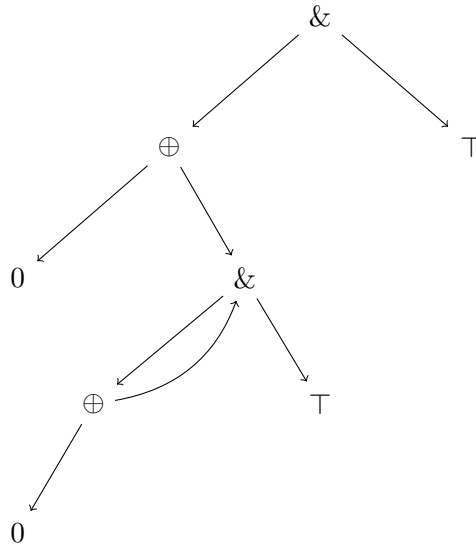
Exemple 8. Considérons l'arbre rationnel de l'exemple 2, et le système plat qui lui est associé. Le μ -terme associé est $\mu x_1.F(x_1, \mu x_2.h(x_2), \mu x_3.a)$, qui est égal par la théorie équationnelle à $\mu x_1.F(x_1, \mu x_2.h(x_2), a)$.

B Exemple de construction algorithmique d'une bisimulation

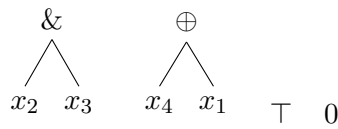
Considérons sur $\Sigma : \{\& : 2, \oplus : 2, \top : 0, 1 : 0\}$ les termes récurrents $t_1 = \mu x.\&(\oplus(0, x), \top)$ et $t_2 = \&(\oplus(0, \mu x.\&(\oplus(0, x), \top)), \top)$. Par commodité, voici les μ -graphes correspondant :



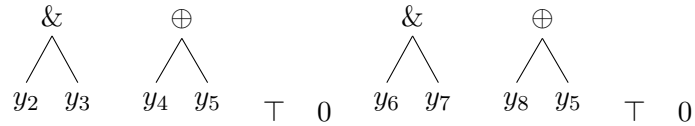
et :



Les systèmes plats correspondant sont $f : 4 \rightarrow 4$:



et $g : 8 \rightarrow 8$:



ce qui correspond, en langage usuel, aux systèmes d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \&(x_2, x_3) \\ x_2 = \oplus(x_4, x_1) \\ x_3 = \top \\ x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \&(y_2, y_3) \\ y_2 = \oplus(y_4, y_5) \\ y_3 = \top \\ y_4 = 0 \\ y_5 = \&(y_6, y_7) \\ y_6 = \oplus(y_8, y_5) \\ y_7 = \top \\ y_8 = 0 \end{array} \right.$$

Les racines désirées correspondent à x_1 et y_1 . On lance donc l'algorithme à partir de cette paire : $C^0 := \emptyset$ et $O^0 := \{(x_1, y_1)\}$.

1. Tout d'abord, $C^1 := C^0 = \emptyset$ et $O^1 := O^0 = \{(x_1, y_1)\}$. Ensuite, on prend la seule paire de O^0 qui est (x_1, y_1) . Ceci correspond aux arbres plats $\&(x_2, x_3)$ et $\&(y_2, y_3)$. On met donc à jour les ensembles de paires : $O^1 := (\{x_1, y_1\} \setminus \{x_1, y_1\}) \cup \{((x_2, y_2), (x_3, y_3))\} = \{((x_2, y_2), (x_3, y_3))\}$ et $C^1 := \{(x_1, y_1)\}$.
2. Pour commencer la deuxième passe, on fait $C^2 := C^1 = \{(x_1, y_1)\}$ et $O^2 := O^1 = \{((x_2, y_2), (x_3, y_3))\}$. On a deux paires à examiner.
 - On commence par (x_2, y_2) : les arbres correspondants sont $\oplus(x_4, x_1)$ et $\oplus(y_4, y_5)$; on met donc à jour les ensembles de paires, de sorte que $C^2 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ et $O^2 = \{((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_1, y_5))\}$.
 - Puis on traite (x_3, y_3) : les arbres correspondants sont tous deux \top , et donc $C^2 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ et $O^2 = \{((x_4, y_4), (x_1, y_5))\}$.
3. Et ainsi de suite...

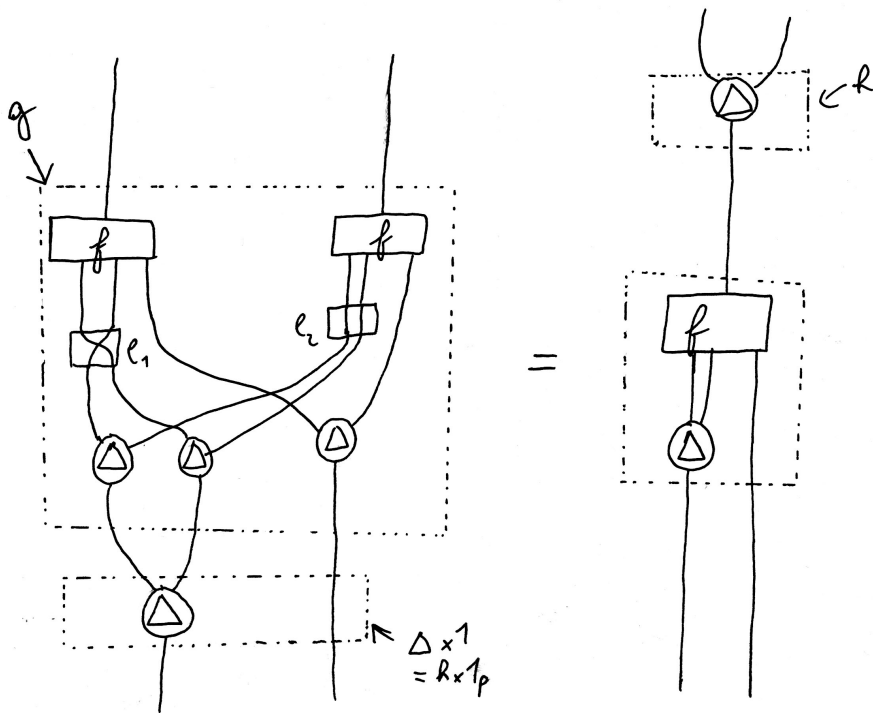
Au final, une bisimulation est donnée par l'algorithme sous la forme de l'ensemble de paires :

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_1, y_5), (x_2, y_6), (x_3, y_7), (x_4, y_8)\}$$

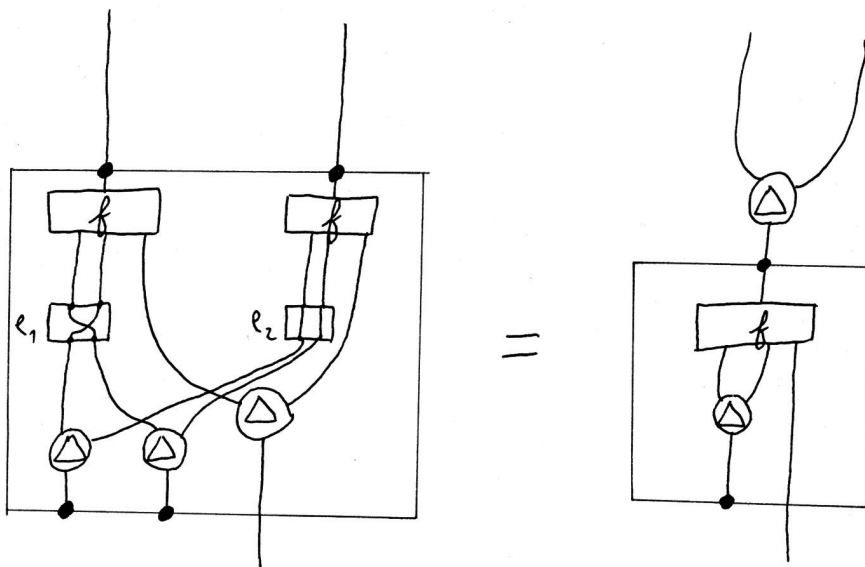
C Preuves concernant les théories d'Elgot

C.1 Les théories d'Elgot sont commutatives

Dans une théorie d'Elgot, pour toutes opérations $f : n + p \rightarrow n$, $g : m + p \rightarrow m$ et $h : n \rightarrow m$, on a que $h \circ f = g \circ (h \times 1_p)$ implique que $g^\dagger = h \circ f^\dagger$. On veut en déduire les identités commutatives. Pour cela, il suffit de prendre $h = \Delta_m$, $g = \langle f \circ (\rho_1 \times 1_p), \dots, f \circ (\rho_m \times 1_p) \rangle$ (notations de la définition 11), et de précomposer f par $\Delta_m \times 1_p$. Si l'on reprend l'exemple d'identité commutative pour $p = n = 1$ et $m = 2$ exposé juste après cette dernière définition, on a bien :



et ceci implique donc par functorialité :



qui est l'identité commutative recherchée.

C.2 Une théorie commutative qui n'est pas d'Elgot

On reprend ici un exemple issu de [12]. On considère la signature $\Sigma = \{\sigma : 2, \perp : 0\}$. Rat_Σ est alors la théorie (d'Elgot) des arbres rationnels sur Σ ; elle contient une flèche $\perp : 0 \rightarrow 1$. On notera \perp_{mn} la composée du morphisme canonique¹² $m \rightarrow 0$ avec $\langle \perp, \dots, \perp \rangle : 0 \rightarrow n$, ce qui nous donne une opération $m \rightarrow n$. On pose \mathbb{T} la sous-théorie de Rat_Σ obtenue en quotientant par la relation d'équivalence engendrée par :

$$\sigma \circ \langle \sigma \circ \langle \perp, \pi_1 \rangle, \sigma \circ \langle \pi_1, \perp \rangle \rangle = \sigma \circ \langle \pi_1, \pi_1 \rangle$$

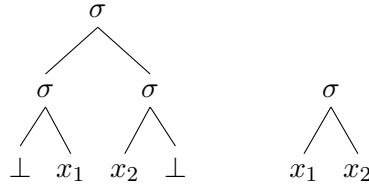
et θ le plongement de Rat_Σ dans \mathbb{T} (c'est un morphisme de théories de l'itération). On suppose que l'opérateur d'itération de ces théories est tel que $\pi_1^\dagger = \perp : 0 \rightarrow 1$ (c'est la complétion de [6, Section 6.4] : on envoie sur un des \perp_{mn} les itérations illicites, comme ici celle du système $x = x$ correspondant à $\pi_1 : 1 \rightarrow 1$, qu'il faut envoyer sur $\perp_{01} = \perp$). On pose :

- $\rho = \Delta : 1 \rightarrow 2$,
- $f : \langle \sigma \circ \langle \sigma \circ \langle \perp_{21}, \pi_1 \rangle, \sigma \circ \langle \pi_2, \perp_{21} \rangle \rangle, \sigma : 2 \rightarrow 2$,
- $g : \sigma \circ \langle \pi_1, \pi_1 \rangle : 1 \rightarrow 1$.

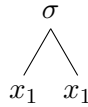
ρ correspond à :

$$x_1 \quad x_1$$

f à :



et g à :



Dans la théorie quotient \mathbb{T} , on a bien $\theta(f) \circ \rho = \rho \circ \theta(g)$. On n'a cependant pas $\theta(f)^\dagger = \rho \circ \theta(g)^\dagger$: ceci impliquerait que dans \mathbb{T} les deux composantes de la solution de f soient l'unique arbre infini étiqueté uniquement par σ . Comme θ est un morphisme de théories de l'itération, on peut résoudre f dans Rat_Σ avant de ne le plonger dans \mathbb{T} . La première composante de f^\dagger n'y est cependant pas de la forme $\sigma(\sigma(\perp, t), \sigma(t, \perp))$ avec t un même arbre, de sorte que lors du plongement dans \mathbb{T} $\pi_1 \circ (f)^\dagger$ n'est pas envoyé sur $\theta(g)$.

12. Rappelons que dans notre notation 0 correspond en fait à l'objet $x^0 \cong 1$ de la théorie, qui est terminal.

C.3 Rat_Σ est une théorie d'Elgot

Ceci provient :

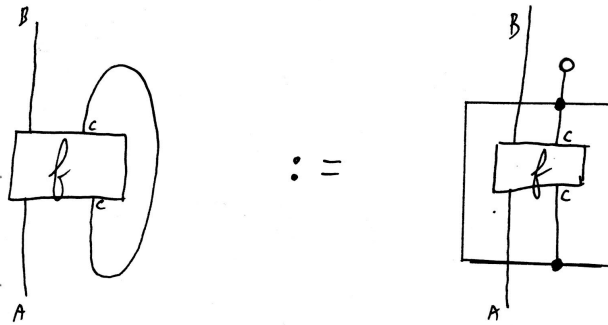
- du fait que Rat_Σ est une théorie itérative, c'est-à-dire une théorie de la préitération telle que pour toute opération ¹³ $f : n + p \rightarrow n$, f^\dagger soit une opération $p \rightarrow n$ de la théorie telle que $f^\dagger = f \circ \langle f^\dagger, 1_p \rangle$, et que ce soit le seul tel morphisme de cette théorie,
- du fait que les théories itératives sont de Conway [6, Théorème 5.3.1],
- et du fait que de surcroît les théories itératives satisfont les identités commutatives et la functorialité [6, Théorème 5.3.3].

D Axiomatisations des théories de point fixe et catégories monoïdales tracées

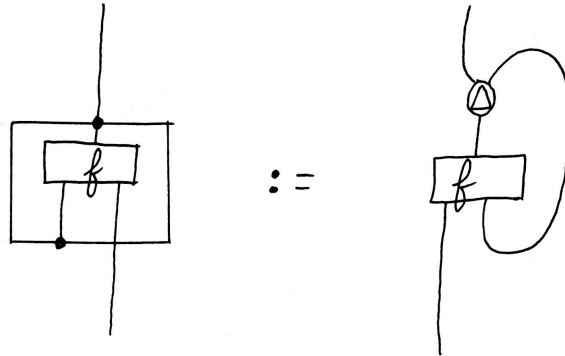
On suppose ici connue la notion de catégorie monoïdale tracée de Joyal, Street et Verity [21]. Ces constructions monoïdales sont, dans le cas particulier où la structure monoïdale est en fait la structure cartésienne de la catégorie, un rapport très étroit avec les points fixes, comme l'ont indépendamment démontré Hyland (non publié) et Hasegawa [18, Théorème 7.1.1] :

Théorème 4 (Hyland-Hasegawa). *Pour une catégorie \mathcal{C} dont la structure monoïdale est cartésienne, il est équivalent de se donner une trace ou un opérateur de point fixe tel que $Th_{\mathcal{C}}$ soit une théorie de Conway.*

En diagrammes de cordes, ces définitions s'écrivent naturellement :



13. En toute rigueur, il y a une restriction aux opérations n'induisant pas ce qui correspond à des équations du style $\langle x_i = x_j \rangle$; on peut cependant dépasser cette restriction en spécifiant une fonction que l'on retourne dans ce genre de cas, cf [6, Chapitre 6.4].



Hasegawa a ensuite montré qu'il existe sur les traces une notion d'uniformité correspondant à celle de functorialité des théories d'Elgot [19, Théorème 4.5], l'uniformité sur les traces étant définie par :

Définition 18 (Trace uniforme). Une trace est dite *uniforme* si pour tout $h : X \rightarrow Y$, $f : A \otimes X \rightarrow B \otimes X$ et $g : A \otimes Y \rightarrow B \otimes Y$, $(id_B \otimes h) \circ f = g \circ (id_A \otimes h)$ implique que $Tr_{A,B}^X(f) = Tr_{A,B}^Y(g) : A \rightarrow B$.

La correspondance précédente envoie alors les opérateurs de point fixe uniformes sur des traces uniformes, et réciproquement. Il est intéressant de noter qu'il y a également une correspondance entre les théories de l'itération et une certaine notion de trace (il suffit d'appliquer la correspondance aux identités commutatives sur les opérateurs de point fixe pour obtenir la version tracée de ces identités), ce que l'on peut montrer en adaptant [6, Proposition 6.7.4] (où c'est fait dans le cadre des opérateurs de feedback, puisque la notion de trace n'existait pas encore).

Références

- [1] Peter Aczel, Jirí Adámek, Stefan Milius, and Jiri Velebil. Infinite trees and completely iterative theories : a coalgebraic view. *Theor. Comput. Sci.*, 300(1-3) :1–45, 2003.
- [2] Jirí Adámek, Stefan Milius, and Jiri Velebil. Elgot theories : a new perspective on the equational properties of iteration. *Mathematical Structures in Computer Science*, 21(2) :417–480, 2011.
- [3] Roberto M. Amadio and Luca Cardelli. Subtyping recursive types. In David S. Wise, editor, *POPL*, pages 104–118. ACM Press, 1991.
- [4] Zena M. Ariola and Jan Willem Klop. Equational term graph rewriting. *Fundam. Inform.*, 26(3/4) :207–240, 1996.
- [5] David Baelde. Least and greatest fixed points in linear logic. *CoRR*, abs/0910.3383, 2009.
- [6] S.L. Bloom and Z. Ésik. *Iteration theories : the equational logic of iterative processes*. EATCS monographs on theoretical computer science. Springer-Verlag, 1993.
- [7] Stephen L. Bloom and Zoltán Ésik. Iteration algebras are not finitely axiomatizable. extended abstract. In Gaston H. Gonnet, Daniel Panario, and Alfredo Viola, editors, *LATIN*, volume 1776 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 367–376. Springer, 2000.
- [8] J.C. Bradfield and C.P. Stirling. Modal logics and mu-calculi : an introduction. In A. Ponse J. Bergstra and S. Smolka, editors, *Handbook of Process Algebra*, pages 293–330. Elsevier, 2001.
- [9] Felice Cardone and Mario Coppo. Decidability properties of recursive types. In Carlo Blundo and Cosimo Laneve, editors, *ICTCS*, volume 2841 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 242–255. Springer, 2003.
- [10] Olivier Carton, Dominique Perrin, and Jean-Eric Pin. Automata and semigroups recognizing infinite words. In Jörg Flum, Erich Grädel, and Thomas Wilke, editors, *Logic and Automata*, volume 2 of *Texts in Logic and Games*, pages 133–168. Amsterdam University Press, 2008.
- [11] Bruno Courcelle. Fundamental properties of infinite trees. *Theor. Comput. Sci.*, 25 :95–169, 1983.
- [12] Zoltán Ésik. Independence of the equational axioms for iteration theories. *J. Comput. Syst. Sci.*, 36(1) :66–76, 1988.
- [13] Zoltán Ésik. Group axioms for iteration. *Inf. Comput.*, 148(2) :131–180, 1999.
- [14] Zoltán Ésik and Anna Labella. Equational properties of iteration in algebraically complete categories. *Theor. Comput. Sci.*, 195(1) :61–89, 1998.

- [15] Charles Grellois. Application de la sémantique des jeux à la vérification des schémas de récursion d'ordre supérieur. *A paraître dans TSI*.
- [16] Charles Grellois. Algebraic theories, monads, and arities. *ArXiv e-prints*, 2011.
- [17] Matthew Hague, Andrzej S. Murawski, C.-H. Luke Ong, and Olivier Serre. Collapsible pushdown automata and recursion schemes. In *LICS*, pages 452–461. IEEE Computer Society, 2008.
- [18] Masahito Hasegawa. *Models of Sharing Graphs (A Categorical Semantics of Let and Letrec)*. PhD thesis, University of Edinburgh, 1997.
- [19] Masahito Hasegawa. The uniformity principle on traced monoidal categories. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 69 :137–155, 2002.
- [20] J. M. E. Hyland and C.-H. Luke Ong. On full abstraction for pcf : I, ii, and iii. *Inf. Comput.*, 163(2) :285–408, 2000.
- [21] A. Joyal, R. Street, and D. Verity. Traced monoidal categories. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 119 :447, 1996.
- [22] Naoki Kobayashi and C.-H. Luke Ong. A type system equivalent to the modal mu-calculus model checking of higher-order recursion schemes. In *LICS*, pages 179–188. IEEE Computer Society, 2009.
- [23] Dexter Kozen. Results on the propositional μ -calculus. *Theor. Comput. Sci.*, 27 :333–354, 1983.
- [24] J. Lambek. A fixpoint theorem for complete categories. *Math. Z.*, 103 :151–161, 1968.
- [25] Paul-André Melliès. Asynchronous games 2 : The true concurrency of innocence. In Philippa Gardner and Nobuko Yoshida, editors, *CONCUR*, volume 3170 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 448–465. Springer, 2004.
- [26] Paul-André Melliès. Asynchronous games 2 : The true concurrency of innocence. *Theor. Comput. Sci.*, 358(2-3) :200–228, 2006.
- [27] Paul-André Melliès. Functorial boxes in string diagrams. In Zoltán Ésik, editor, *CSL*, volume 4207 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–30. Springer, 2006.
- [28] Paul-André Melliès. Segal condition meets computational effects. In *LICS*, pages 150–159. IEEE Computer Society, 2010.
- [29] Paul-André Melliès. Dialogue categories and chiralities. *à paraître (disponible en ligne)*.
- [30] C.-H. Luke Ong. On model-checking trees generated by higher-order recursion schemes. In *LICS*, pages 81–90. IEEE Computer Society, 2006.

- [31] Luigi Santocanale. μ -bicomplete categories and parity games. *ITA*, 36(2) :195–227, 2002.
- [32] Alex K. Simpson and Gordon D. Plotkin. Complete axioms for categorical fixed-point operators. In *LICS*, pages 30–41. IEEE Computer Society, 2000.
- [33] Nicolas Tabareau. *Modalités de ressource et contrôle en logique tensorielle*. PhD thesis, Université Denis Diderot - Paris 7, 2008.
- [34] Thomas Wilke. An eilenberg theorem for infinity-languages. In Javier Leach Albert, Burkhard Monien, and Mario Rodríguez-Artalejo, editors, *ICALP*, volume 510 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 588–599. Springer, 1991.

Table des matières

1	Descriptions inductives	4
1.1	Algèbres de Wilke et mots ultimement périodiques	4
1.2	Arbres rationnels et systèmes d'équations	5
1.3	Théories munies d'un point fixe sur une signature et arbres rationnels	8
2	Equivalence des représentations finies d'une même arbre rationnel	9
2.1	Insuffisance de l'axiomatisation de la théorie avec point fixe .	10
2.2	La règle manquante	10
2.3	Décision de l'équivalence par bisimulation	11
2.4	Equivalence et fibrations	13
2.5	Conjecture : un système de factorisation des fibrations	14
3	Caractérisations équationnelles des propriétés de point fixe	17
3.1	Théories de Conway	18
3.2	Théories de l'itération	19
3.3	Théories d'Elgot	21
3.4	Arbres rationnels et théories libres	22
3.5	Itération et traces	23
4	Une interprétation catégorique des arbres rationnels	23
4.1	Algèbres initiales et induction	23
4.2	Algèbres initiales et théories de l'itération	25
4.3	Interprétation catégorique des arbres rationnels	25
5	Vers une sémantique catégorique du μ-calcul : perspectives et conjectures	26
A	Termes d'une théorie à point fixe sur une signature et arbres rationnels	27
A.1	Des termes aux arbres	27
A.2	Des arbres aux termes	28
B	Exemple de construction algorithmique d'une bisimulation	28
C	Preuves concernant les théories d'Elgot	30
C.1	Les théories d'Elgot sont commutatives	30
C.2	Une théorie commutative qui n'est pas d'Elgot	32
C.3	Rat_{Σ} est une théorie d'Elgot	33
D	Axiomatisations des théories de point fixe et catégories monoïdales tracées	33